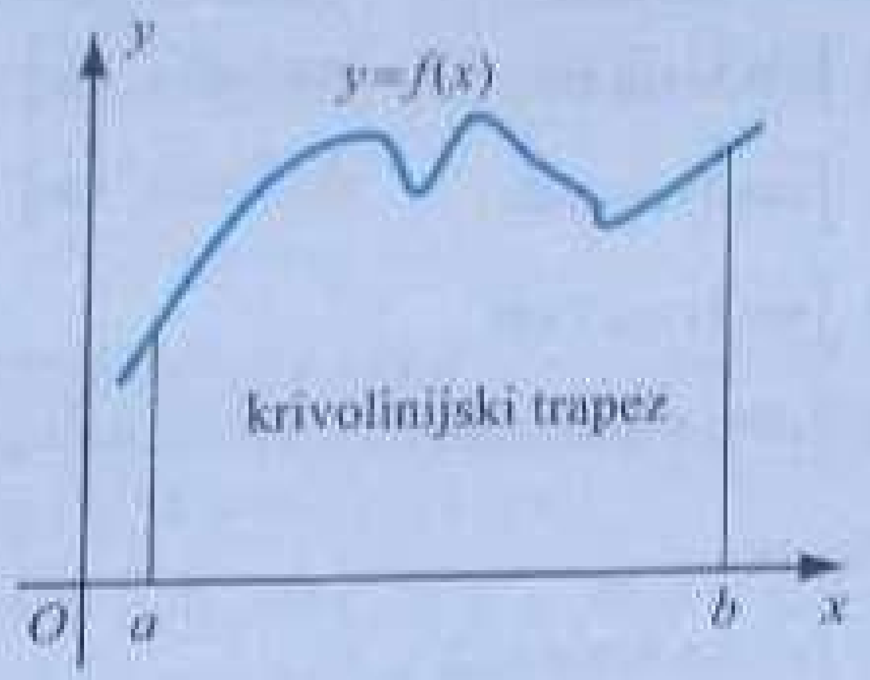
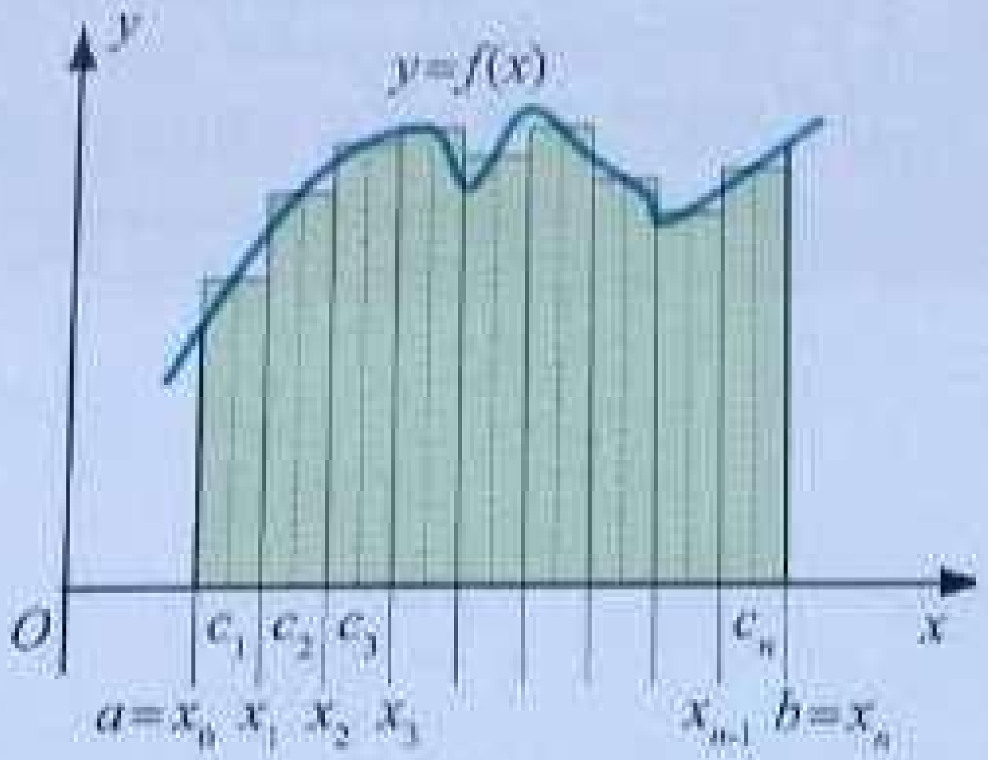
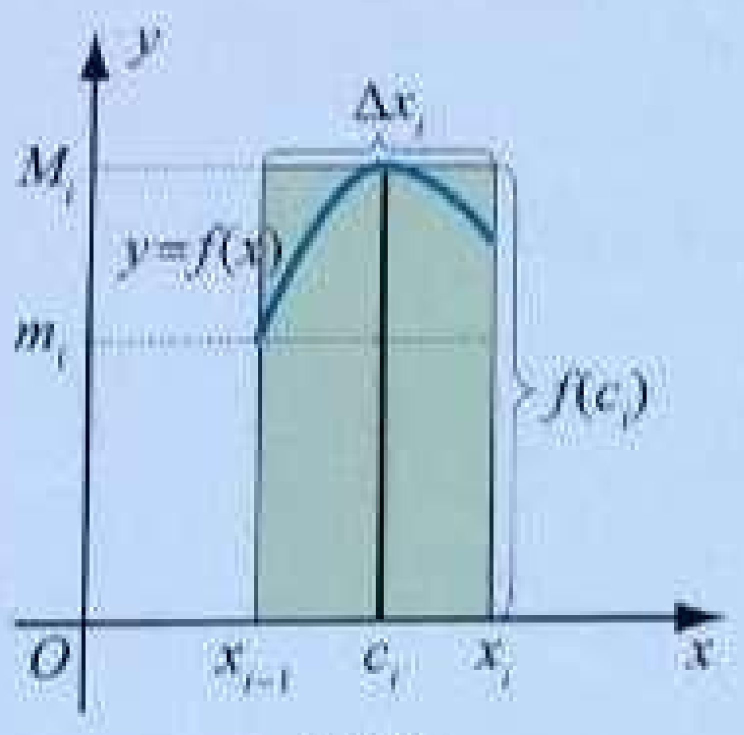
3.7 Definicija određenog integrala



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

Neka je funkcija f: $[a, b] \to R$ nenegativna i neprekidna. Grafik jedne takve funkcije je dat na slici 1. Figuru koju ograničava kriva $y=f(x)$, Ox osa i prave $x=a$ i $x=b$ nazivamo **krivolinijskim trapezom**.

Kako izračunati površinu krivolinijskog trapeza? Prirodno je da podijelimo (razbijemo) odsječak $[a, b]$ na n djelova tačkama

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b, \quad \ldots\ldots (1)$$

zatim u svakom od odsječaka $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, ..., n)$ izaberemo tačke c_i i sastavimo zbir

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+....+f(c_n)\Delta x_n,$$

gdje je $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Zbir S_n nazivamo integralnim zbirom funkcije f na odsječku $[a, b]$. Ovaj zbir je, očigledno, jednak zbiru površina pravougaonika prikazanih na slici 2. Zbir S_n predstavlja približnu vrijednost tražene površine.

Zbir S_n zavisi od načina dijeljenja (1) odsječka $[a, b]$ i od izbora tačaka $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Označimo sa $\max \Delta x_i$ najveći od brojeva $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Uočimo da ako $\max \Delta x_i \to 0$, tada $n \to +\infty$. Ako za $\max \Delta x_i \to 0$ zbirovi S_n imaju istu graničnu vrijednost S nezavisno od dijeljenja (1) odsječka $[a, b]$ i od izbora tačaka c_i u odsječcima $[x_{i-1}, x_i]$, tada broj S nazivamo površinom (datog) krivolinijskog trapeza.

Dakle,

$$S=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\left(f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+...+f(c_n)\Delta x_n\right).$$

Do površine S krivolinijskog trapeza možemo doći i na sljedeći način. Kako je funkcija f neprekidna na odsječku $[a, b]$, to je ona neprekidna i na svakom od odsječaka $[x_{i-1}, x_i]$. Saglasno svojstvima neprekidnih funkcija na odsječku (Vajerštrasova teorema), za svako $i=1, 2, 3, ..., n$ postoje brojevi m_i i M_i takvi da je za svako $x \in [x_{i-1}, x_i]$: $m_i \leq f(x) \leq M_i$. Na slici 3 dat je krivolinijski trapez čija je jedna osnovica odsječak $[x_{i-1}, x_i]$ i njemu pripadajući upisani i opisani pravougaonici. Površina upisanog pravougaonika je $m_i\Delta x_i$, a opisanog $M_i\Delta x_i$.

Kako je

$$m_i\Delta x_i \leq f(c_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i$$

za svako $i=1, 2, 3, ..., n$, to je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i < S_n < \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

gdje je $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Očigledno važe nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i < S < \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Da podsjetimo:

U geometriji površina ravne figure je definisana pomoću četiri aksiome:

1) Površina svake figure F je nenegativan broj, tj. $S(F) \geq 0$ (ovdje je sa $S(F)$ označena površina figure F).
2) Podudarne figure imaju jednake površine, tj. ako je $F_1 \cong F_2$, tada je $S(F_1)=S(F_2)$.
3) Površina figure sastavljena od djelova jednaka je zbiru površina tih djelova, tj. ako je figura F sastavljena od djelova F_1 i F_2, tada je $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$ (djelovi F_1 i F_2 mogu imati zajedničke samo djelove svojih granica).
4) Površina kvadrata stranice 1 jednaka je 1.

Na sličan način uvodi se dužina duži i zapremina tijela.

Razmotrimo nizove (a_n) i (A_n) čiji su opšti članovi, redom,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i .$$

Niz (a_n) je monotono rastući i ograničen s gornje strane brojem S.

Niz (A_n) je monotono opadajući i ograničen s donje strane brojem S.

Slijedi, nizovi (a_n) i (A_n) konvergiraju. Ako su njihove granične vrijednosti jednake, tj. ako je

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i ,$$

tada, primjenom teoreme o uklještenju za nizove dobijamo da je

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \left(= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \right). \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Primjer 1. Nađimo površinu koju ograničava prava $y=x$, Ox osa i prave $x=a$ i $x=b$ (slika 4).

Ovdje se radi o površini trapeza koja se računa po formuli

$$S = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Istu ovu površinu ćemo naći koristeći formulu (1), odnosno (2). Podijelimo na n jednakih djelova odsječak $[a, b]$ tačkama

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\colon x_i=a+i\Delta x, \text{ gdje je } \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Neka je c_i proizvoljna tačka intervala (x_{i-1}, x_i). Tada je $x_{i-1}<c_i<x_i$, odnosno $x_{i-1}\Delta x<c_i\Delta x<x_i\Delta x$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\Delta x < S_n < \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x,$$

gdje je

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i .$$

Slijedi,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} < S_n < \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

odnosno

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right) < S_n < \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right),$$

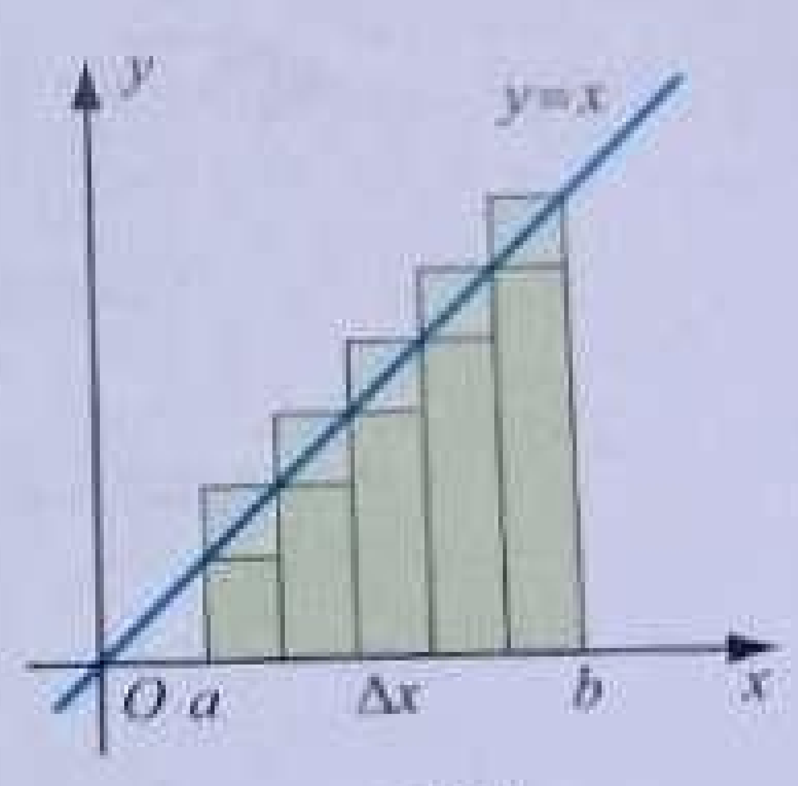
$$\frac{b-a}{n}\left(na+\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) < S_n < \frac{b-a}{n}\left(na+\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right).$$

Da podsjetimo ($n\in\mathbb{N}$):

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.



Sl. 4

Zadatak 1. Naći površinu figure koju ograničava parabola $y=x^2$, osa apscisa i prava $x=1$.

(Uputstvo:

Podijelimo odsječak $[0,1]$ tačkama $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdje je $x_i=\dfrac{i}{n}$, za $i=0,1,2,\ldots, n$.

Tada je

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

Neka je c_i proizvoljna tačka intervala (x_{i-1}, x_i). Tada je

$$x_{i-1}^2\Delta x < c_i^2\Delta x < x_i^2\Delta x, \text{ tj.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2\Delta x < \sum_{i=1}^{n} c_i^2\Delta x < \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x .$$

Dalje je

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < S_n < \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 ,$$

gdje je

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \Delta x .$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ to je}$$

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < S_n < \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2\right.$$

odnosno

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}).$$

Zadatak 2. Dokazati da je površina figure koju ograničava kriva $y=x^2$, Ox osa i prava $x=1$ jednaka $\frac{1}{4}$.

Kako je

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{n(n-1)}{2} \text{ i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},$$

to je

$$\frac{b-a}{n}\left(na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right)<S_n<\frac{b-a}{n}\left(na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

$$(b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n}<S_n<(b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Dalje je

$$\lim_{n\to+\infty}\left((b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right)=\frac{b^2-a^2}{2} \text{ i}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left((b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{b^2-a^2}{2},$$

odnosno

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{b^2-a^2}{2} \text{ (površina trapeza).}$$

Razmotrimo proizvoljnu neprekidnu funkciju f na odsječku $[a,b]$. (Ova funkcija može biti pozitivna, negativna ili mijenjati znak na odsječku $[a,b]$).

Podijelimo odsječak $[a,b]$ tačkama $a=x_0<x_1<x_2<.....<x_n=b$ na n djelova, i u svakom od odsječaka $[x_{i-1},x_i]$ izaberimo proizvoljno tačku $c_i\in[x_{i-1},x_i]$. Neka je $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Sada formirajmo integralni zbir (sumu)

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+...+f(c_n)\Delta x_n.$$

Definicija 1. Ako za svaku podjelu odsječka $[a,b]$ takvu da je $\max\Delta x_i\to 0$ i za svaki izbor tačaka $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ niz (S_n) teži istom broju I, tada broj I nazivamo određenim integralom funkcije f na odsječku $[a,b]$ i označavamo sa

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Dakle,

$$I=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

Broj a nazivamo donja, a broj b gornja granica integrala. Odsječak $[a,b]$ nazivamo odsječak integracije, slovo x promjenljiva integracije.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na odsječku $[a,b]$ ako postoji $\int_a^b f(x)dx$.

U matematičkoj analizi se dokazuje tvrđenje da je svaka neprekidna funkcija na odsječku $[a,b]$ integrabilna na odsječku $[a,b]$. Korist od ovog tvrđenja je očigledna. Kada dokažemo da je funkcija f neprekidna na odsječku $[a,b]$, tada znamo da postoji

$$I=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

nezavisno od podjele odječka $[a,b]$ i od izbora tačaka u podionim odsječcima. U praksi mi biramo jednu podjelu (koja nam je najpodesnija) i određeni izbor tačaka (opet za nas najpodesniji), formiramo integralni zbir S_n i nalazimo graničnu vrijednost $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} S_n$. Tako određujemo

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Geometrijski smisao određenog integrala je u sljedećem.

Ako je funkcija f neprekidna i nenegativna na odsječku $[a,b]$, tada je površina S krivolinijskog trapeza kojeg ograničava kriva $y=f(x)$, osa apscisa i prave $x=a$ i $x=b$ jednaka $\int_a^b f(x)dx$.

Ako je $f(x)\le 0$ na odsječku $[a,b]$, tada je površina krivolinijskog trapeza kojeg ograničava kriva $y=f(x)$, osa apscisa i prave $x=a$ i $x=b$ jednaka $-\int_a^b f(x)dx$.

Primjer 2. Izračunati $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ koristeći geometrijski smisao određenog integrala.

Razmotrimo funkciju $y=\sqrt{9-x^2}$ definisanu na odsječku $[-3,3]$ (polukružna linija poluprečnika 3, slika 5). Određeni integral $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ jednak je površini polukruga poluprečnika 3. Dakle, $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}$.

Napomena 1.

a) Uočimo da određeni integral zavisi od oblika funkcije $f(x)$ i granica integracije. On ne zavisi od toga kojim slovom je označena promjenljiva integracije. Tako je

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\ldots=\int_a^b f(z)dz.$$

b) Pojam određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ smo uveli pretpostavljajući da je $a<b$. U slučaju da je $b<a$ uzimamo, po definiciji, da je

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

Specijalno, $\int_1^0 f(x)dx=-\int_0^1 f(x)dx.$

Zadatak 3. Koristeći geometrijski smisao određenog integrala, naći:

a) $\int_1^2 (x+2)dx$,

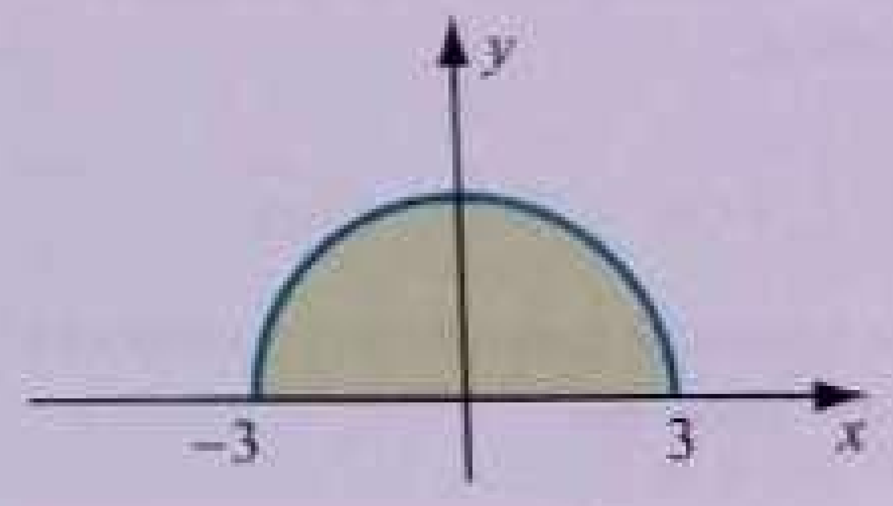
b) $\int_2^3 (3x-1)dx$,

c) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$,

d) $\int_{-2}^{2}\left(-\sqrt{4-x^2}\right)dx$,

e) $\int_{-1}^{1}|x|dx$,

f) $\int_{-2}^{3}|x+2|dx$.



Sl. 5

Zadatak 4. Koristeći geometrijski smisao određenog integrala, naći:

a) $\int_{-\pi}^{0}\sin x dx+\int_0^{\pi}\sin x dx$,

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx$,

c) $\int_0^3 \left||x-1|-1\right|dx$.

- Izračunavanje određenog integrala -

(1)

Pokazaćemo da postoji formula kojom se izračunavanje određenog integrala svodi na izračunavanje neodređenog integrala. Tu formulu su, nezavisno jedan od drugog dokazali Njutn i Lajbnic i poznata je pod nazivom Njutn-Lajbnicova formula.

<u>Teorema:</u> (Njutn-Lajbnicova formula)

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$, tada je: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (*) gdje je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b).

Desna strana formule (*) često se piše u obliku $[F(x)]_a^b$ ili $F(x)\Big|_a^b$ a sama formula (*) u obliku:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Primjer 1:

a) $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$

Razmotrićemo smjenu promjenljivih i metod parcijalne integracije kod određenih integrala.

Neka je zadat integral $\int_a^b f(x)dx$ u kojem je funkcija $f(x)$ neprekidna na odsječku $[a,b]$ i neka je funkcija $\varphi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ neprekidno diferencijabilna na $[\alpha,\beta]$, pri tome je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$.

Uvedimo smjenu promjenljive $x = \varphi(t)$.

Tada važi:

Teorema 2: Ako je funkcija $f(\varphi(t))$ defini-sana i neprekidna na odsječku $[\alpha,\beta]$, tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

<u>Dokaz:</u> Neka je F primitivna funkcija funkcije f. Tada je:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad i \quad \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$= F(\varphi(t)) + C \rightarrow$ (ova jednakost se lako provjerava diferenciranjem).

Dalje je, $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (1)

i $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$

$= F(b) - F(a)$. (2)

Iz (1) i (2) slijedi: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

<u>Primjer 2:</u> Nađi $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

R/ Uvedimo smjenu $x = 3\sin t$. Tada je $dx = 3\cos t\,dt$. Odredimo nove granice integrala: za $x=0$ dobijamo $t=0$.
za $x=3$ dobijamo $t=\frac{\pi}{2}$. Slijedi,

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c|} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}$$

Primjer 3: Nađi $\int_1^2 \sqrt{3+x}\,dx$

$$\int_1^2 \sqrt{3+x}\,dx = \left[\begin{array}{c} 3+x=t \\ dx=dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 4 & 5 \end{array} \end{array}\right] = \int_4^5 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^5 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$$

Teorema 3: Ako su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ neprekidno diferencijabilne na odsječku $[a,b]$, tada je:

$$\int_a^b u\,dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Dokaz: Kako je $(uv)' = u'v + uv'$ to je:

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b u \cdot v'\,dx .$$

Kako je $\int_a^b (uv)'\,dx = (uv)\Big|_a^b$, to je:

$$\int_a^b u\,dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Primjer 4: Nađi $\int_1^2 \ln x\,dx$

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array}\right] = (x \ln x)\Big|_1^2 - \int_1^2 dx =$$

$$= (2\ln 2 - 1\ln 1) - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 .$$

- Svojstva određenog integrala -

Neka su $f, g \in C[a,b]$.

Svojstvo 1: a) Ako je A konstanta, tada je:

$$\int_a^b A f(x)\,dx = A \int_a^b f(x)\,dx$$

b) $\int_a^b A\,dx = A(b-a)$

c) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Svojstvo 2: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Svojstvo 3: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Svojstvo 4: Ako je odsječak $[a,b]$ tačkom c podijeljen na odsječke $[a,c]$ i $[c,b]$, tada je određeni integral na odsječku $[a,b]$ jednak zbiru određenih integrala na odsječcima $[a,c]$ i $[c,b]$

tj. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Svojstvo 5: Ako je $f(x) \geq 0$ na odsječku $[a,b]$,

tada je $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Na osnovu svojstva 5, zaključujemo da:

ako je $f(x) \geq g(x)$ na odsječku $[a,b]$, tada je:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ako su m i M najmanja i najveća vrijednost funkcije f na odsječku $[a,b]$, tada je:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \quad (**)$$

<u>Svojstvo 6:</u> (Teorema o srednjoj vrijednosti)

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na odsječku $[a,b]$, tada postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da je:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

<u>Dokaz:</u> Iz $(**)$ slijedi da je:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

$$\left(m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x) \right).$$

Kako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, to ona uzima sve vrijednosti iz intervala $[m,M]$ tj. postoji $c \in [a,b]$ tako da je:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c), \quad \text{tj.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

① Izračunati:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}}$ c) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

② a) $\int \frac{dx}{(x^2+3)^4}$

b) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

c) $\int \arcsin x\,dx$

d) $\int x\cos 2x\,dx$

③ a) $\int \cos 5x \cos x\,dx$

b) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

d) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

④ $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-2x+8}}$